

VIII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale nazionale – 12 maggio 2007

Istruzioni Generali

- ★ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ★ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- ★ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2360 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- ★ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ★ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ★ **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

Informazioni aggiuntive

- ★ I problemi sono elencati in ordine di *presunta* difficoltà.

1. Il passo del paguro

Il sagace *Numeruto* ricorre sovente al passo del paguro per confondere i suoi avversari. Ogni passo consiste nell'aggiungere $(1, 1)$ oppure $(-1, 0)$ alla sua posizione. Se *Numeruto* parte dal punto $(0, 0)$, quanti sono i punti del quadrato $[-5, 5] \times [-5, 5]$ (bordi compresi) raggiungibili da *Numeruto* senza mai uscire dal quadrato?

2. Un addestramento impegnativo

Una fase essenziale dell'addestramento dei mateninja è il taglio con la spada. Oggi *Numeruto* deve mostrare la sua abilità al maestro e ai suoi compagni. Davanti a sé ha un cubo di legno con gli spigoli lunghi 12. Colora i centri di ogni faccia usando 3 colori (lo stesso colore per i centri di facce opposte). Taglia poi di netto con la spada lungo ogni piano passante per una terna di punti di colori distinti. Si determini il volume del solido contenente il centro del cubo.

3. Indigestione

Otenusa vuole provare a indovinare quante ciotole di *ramen* ha divorato il goloso *Numeruto*. Il maestro *Isoshilo* le rivela che il numero di ciotole è pari alle ultime 4 cifre del 2007^{esimo} termine della sequenza 3, 15, 24, 48, ... dei multipli positivi di 3 che precedono un quadrato. Quante ciotole ha ingurgitato *Numeruto*?

4. In trappola

Numeruto è circondato da quattro mateninja del villaggio *del Binomio*. I quattro mateninja avversari sono ai vertici di un quadrilatero $ABCD$ e *Numeruto* occupa il punto P interno al quadrilatero. Se le distanze di P dai quattro vertici del quadrilatero sono 2, 4, 6, 8 *mat-ken*, quanto vale l'area massima in *mat-ken*² che può avere $ABCD$?

5. Spirali di forza

I 25 *Grandin* del villaggio *della Retta* si sono disposti a spirale, come in figura, dove i numeri corrispondono alla loro forza vitale. Se si seleziona una squadra di cinque mateninja in modo che non ci siano mai due di questi sulla stessa riga o sulla stessa colonna, qual è il minimo valore possibile di forza vitale del mateninja più forte del quintetto, al variare di tutte le possibili scelte?

1	16	15	14	13
2	17	24	23	12
3	18	25	22	11
4	19	20	21	10
5	6	7	8	9

6. Un misto di squadre miste

Alla lezione di mateninjutsu assistono 4 giovani mateninji maschietti e 8 giovani mateninje femminucce. In quanti modi questi si possono dividere in squadre di 3 mateninja in modo che ogni squadra sia mista, abbia cioè mateninja di entrambi i sessi?

7. Sotto a chi tocca

Per *Numeruto* e i suoi amici, il momento di affrontare l'esame da *Mezzin* è finalmente arrivato! La commissione di esaminatori deciderà chi per primo dovrà affrontare l'esame lanciando dei dadi.

Le facce dei 27 dadi di lato unitario sono colorate di rosso, bianco e blu in modo tale che gli esaminatori riescano ad assemblare un maxi-dado $3 \times 3 \times 3$ tutto colorato di rosso, un maxi-dado $3 \times 3 \times 3$ tutto colorato di bianco e un maxi-dado $3 \times 3 \times 3$ tutto colorato di blu. Determinare il numero di dadi unitari sulle cui facce compaiono tutti e tre i colori.

8. Lo zodiaco dei mateninja

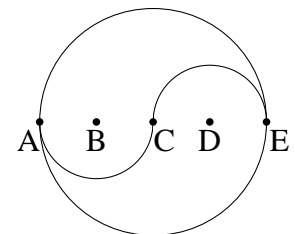
I segni dello zodiaco mateninja sono 12 come i nostri. Ogni segno ha esattamente due segni amici e un segno nemico. I due amici di un segno sono sempre uno nemico dell'altro. Un segno e il suo nemico hanno sempre gli stessi due segni amici. Amicizia e inimicizia sono simmetriche. *Numeruto* si ricorda solo che il nemico dell'elefante è il topo e che uno degli amici della tigre è la rana e deve completare uno schema riportando gli amici e il nemico di tutti i segni. Tra quante combinazioni compatibili con le regole espone può scegliere?

9. La via per il successo

L'esame per diventare *Mezzin* diventa sempre più complesso e impegnativo per *Numeruto*. Egli riceve una progressione aritmetica di 137 elementi, uno dei quali è 0. Dopo lunghe ed estenuanti ricerche, *Numeruto* scopre che la somma dei termini della successione è 10001. Quanto può valere al massimo il termine più grande della successione?

10. L'amuleto spezzato

Lo *Yin-Yang*, amuleto simbolo del villaggio *della Retta*, si ottiene prendendo cinque punti allineati ed equi-spaziati A, B, C, D, E , e tracciando una circonferenza con centro in C e raggio AC e due semicirconferenze di raggio AB centrate una in B e l'altra in D come in figura. Il dispettoso *Numeruto* ha tagliato uno *Yin-Yang* con un taglio diritto passante per B e perpendicolare al segmento AE . Il taglio e le due semicirconferenze delimitano 4 parti. Se $AB = 60 \text{ mat-bu}$, quanti mat-bu^2 misura la parte più piccola in cui *Numeruto* ha diviso lo *Yin-Yang*? Dare come risposta il coefficiente che moltiplica π , una volta sciolte tutte le parentesi.

**11. Vitalità di gruppo**

Un gruppo di 10 mateninja si ritrova prima di una missione. Se l'insieme dei valori ottenuti calcolando la media aritmetica delle forze vitali di ogni possibile gruppo di tre mateninja è $2, 4, \dots, 240$ (i numeri pari compresi tra 2 e 240), qual è la media aritmetica della forza vitale di tutto il gruppo di 10 mateninja?

12. Corsa contro il tempo

Numeruto deve accorrere per salvare la sua compagna *Otenusa*, prigioniera a 265 mat-cho da lui. *Numeruto* può decidere, sin dalla partenza, se continuare a correre oppure spendere un minuto per evocare uno spirito che gli raddoppia la velocità, ma tra una invocazione e l'altra deve percorrere almeno 1 mat-cho . Se all'inizio la sua velocità è di 1 mat-cho al minuto, quanti minuti ci metterà al minimo per arrivare da *Otenusa*? Dare come soluzione il numeratore della frazione ridotta ai minimi termini.

13. Missione strampalata

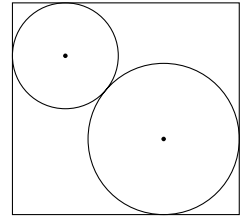
Oggi la squadra di *Numeruto* si trova ad affrontare una missione piuttosto singolare. I tre si ritrovano a considerare la successione di naturali $a_1 = 1000, a_2 = x, a_3 = a_1 - a_2, \dots, a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$. La successione termina al primo a_i negativo. Quale valore di x dovrebbe rintracciare la squadra di *Numeruto* per ottenere la sequenza più lunga?

14. Un motivo di orgoglio

Il copri-fronte è il simbolo che ogni mateninja del villaggio *della Retta* indossa con fierezza. Oggi a *Numeruto* è richiesto di costruirsi da sé il suo copri-fronte. *Numeruto* parte da un parallelogramma $ABCD$ di area 12600. Dopo di che denota con E, F, G, H i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC, CD, DA e infine traccia i segmenti AG, BH, CE, DF . Calcolare l'area del parallelogramma che ha per vertici le intersezioni di questi quattro segmenti.

15. In campo aperto

Numeruto e *Sekante* si affrontano finalmente, faccia a faccia, in un pianoro. Il pianoro ha la forma di un rettangolo 2940×3000 , e si devono tracciare due circonferenze tangenti esternamente, e ognuna delle due tangente a due lati consecutivi del rettangolo, in modo che tutti i lati siano toccati da una sola circonferenza. Determinare quanto vale, al massimo, la somma dei raggi.

**16. Invasione!**

I mateninja del villaggio *della Radice* hanno invaso il villaggio di *Numeruto*! Ogni angolo di strada è teatro di cruenti scontri. In uno di questi, due mateninja sono impegnati a trovare il più piccolo intero $b > 1$ tale che esistano m, n naturali minori di b per cui l'intero positivo $(mnmn)_b$ (cioè il numero $mnmn$ in base b) sia un cubo perfetto. Restituire come risposta il valore $b + m + n$.

17. L'attimo fuggente

L'ultimo momento favorevole per il rituale di chiusura del sigillo che imprigiona il demone è stato il 2007, in quanto la matematica è rafforzata dal fatto che 2007 è divisibile per 9, 2008 per 8, 2009 per 7 e 2010 per 6. Quando inizierà per la prima volta dopo il 2007 una sequenza, più lunga di questa, di anni con la caratteristica di essere divisibili ordinatamente per degli interi positivi $k, k - 1, k - 2, \dots$?

18. Una forma di cortesia

Nei tempi antichi esistevano ben 95 scuole *Shinobi*, ognuna delle quali annoverava un solo maestro mateninja. Ogni anno, le due scuole che annoveravano meno maestri di tutte le altre (o eventualmente due scelte a caso tra tutte le scuole con il minimo numero di maestri se più di due) si fondevano. Era tradizione consolidata che, durante i rituali legati alla fusione di due scuole, ognuno dei maestri mateninja delle due scuole in via di fusione facesse un omaggio a ognuno dei maestri dell'altra scuola. Oggi, ai tempi di *Numeruto*, non rimangono che 3 scuole, una con 31 maestri e le altre due con 32 maestri. Quanti omaggi sono stati scambiati in tutto fino ad oggi?

19. Amara medicina

Otenusa è impegnata in una difficile tecnica curativa. Dosi e misure sono essenziali per i mateninja medici. *Otenusa* considera un quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza con raggio pari a 15 *mat-shaku*. Detto E il simmetrico di B rispetto all'asse del segmento AC , *Otenusa* sa che AC, BD e DE hanno lunghezze pari rispettivamente a 23, 24 e 25 *mat-shaku*. A quanto ammonta, in *mat-shaku*², la superficie del quadrilatero $ABCD$?

20. Una curiosa coincidenza

Recentemente è stata notata una curiosa coincidenza. Tutti i più grandi mateninja nella storia del villaggio *della Retta* hanno avuto per forza vitale un intero positivo N tale che esistono $a_1, a_2, \dots, a_{2007}$ interi positivi per cui $a_1 < a_2 < \dots < a_{2007}$ e $N = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{2007}{a_{2007}}$. Trovare la somma di tutti i valori N di forza vitale (indicare le ultime 4 cifre di tale somma se il risultato è maggiore di 9999).

21. Posizioni magiche

Come tutti sanno, i segni dello zodiaco mateninja sono 12 come i nostri. Ogni segno ha esattamente due segni amici e un segno nemico. I due amici di un segno sono sempre uno nemico dell'altro. Un segno e il suo nemico hanno sempre gli stessi due segni amici. Amicizia e inimicizia sono simmetriche.

Le tecniche matematiche dei mateninja richiedono di eseguire con le mani una rapida sequenza di posizioni. Le diverse posizioni in tutto sono 12, ognuna chiamata come il corrispondente segno dello zodiaco mateninja. In una sequenza di posizioni valide le posizioni sono tutte diverse, se compare un segno non compare il suo nemico e due segni amici non sono mai consecutivi. Quante sono in tutto le sequenze di posizioni valide che cominciano con la posizione della tigre?

22. Un percorso accidentato

Numeruto e la sua squadra sono all'inseguimento dei rapitori di *Sekante*. I nostri mateninja avanzano cauti, gli inseguiti hanno disseminato il percorso di trappole. All'improvviso, *Numeruto* incappa in un tranello. Sia $p(x) = \left(\frac{x^4+x^2+1}{3}\right)^{2007}$. Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{8028}x^{8028}$, l'unico modo per sottrarsi alla trappola è calcolare $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3k+1} + \dots + a_{8026}$. Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore del risultato ridotto ai minimi termini.

23. Un funzionario distratto

Le missioni vengono catalogate dal gran consiglio del villaggio in ordine di difficoltà decrescente, nelle categorie A, B, C, D. Esistono tre livelli di mateninja, i *Piccin* (gli apprendisti), i *Mezzin* e i *Grandin* (i più abili). Le missioni A vengono affidate esclusivamente ai *Grandin*, quelle B soltanto ai *Mezzin*, quelle C possono essere assegnate a *Mezzin* o *Piccin*, quelle D solo ai *Piccin*.

Un funzionario distratto ha perso il rotolo su cui aveva scritto le categorie delle ultime 8 missioni vagliate dal consiglio. Sa soltanto che 1 di queste è stata affidata a un *Grandin*, 2 a dei *Mezzin*, 5 a squadre di *Piccin*. Non ricorda però quali missioni siano state affidate a chi. In quanti modi può assegnare a ogni missione la sua categoria in modo compatibile con le informazioni in suo possesso?

24. Un mazzo truccato

Il classico mazzo mateninja è composto da 16 carte, contrassegnate da un numero tra $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ e da un simbolo tra \heartsuit , \clubsuit , \diamondsuit , \spadesuit (in modo che per ogni accoppiata numero-simbolo ci sia una carta). Un mazzo mateninja diventa magico se carte adiacenti hanno valori adiacenti (il $\boxed{4}$ viene considerato adiacente all' $\boxed{1}$ e viceversa, un valore non è adiacente a se stesso). Quanti sono i possibili mazzi mateninja magici? Dare come risposta il numero di tutti i divisori positivi del numero di mazzi magici.