



VIII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale B – 11 maggio 2007

Istruzioni Generali

- ★ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ★ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ★ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- ★ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2360 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- ★ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ★ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo.
- ★ **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

Informazioni aggiuntive

- ★ Alcuni dei problemi che, a parere della giuria sono più impegnativi, sono stati contrassegnati con un asterisco [★].

1. Il compito in classe di storia

Il prode *Numeruto* è un mateninja apprendista: frequenta ancora l'accademia ma è più bravo sul campo che sui banchi. Oggi c'è il compito di storia e la prima domanda chiede il numero esatto di mateninja diplomatisi *Grandin*, dalla fondazione del villaggio ad oggi ed egli proprio non ha idea della risposta. Per fortuna riesce ad intercettare un suggerimento in codice della bella *Otenusa* diretto al suo rivale *Sekante*: "È un numero di quattro cifre, multiplo di 25 che, diviso per 25, dà un numero di due cifre che sono le cifre centrali del numero stesso" (come 45 e 2450, solo che $45 \times 25 \neq 2450$). Qual è la risposta?

2. Un ninja parsimonioso

I mateninja vivono organizzati in vari villaggi. Quello *della Retta* ad esempio è costituito da un'unica lunga via (assolutamente dritta), fiancheggiata da 2007 edifici numerati da 1 a 2007. I mateninja consumano un sacco di carta e infatti tutti gli edifici con numeri multipli di 18 sono cartolerie; inoltre molti mateninja sono facoltosi, quindi tutti gli edifici con numeri multipli di 24 sono negozi di lusso. *Numeruto* gira tutto il villaggio in cerca del miglior prezzo per la carta a quadretti: quante cartolerie visita in totale, se salta quelle di lusso?

3. Lama spezzata

[★]

Il kunai è una delle armi di base utilizzate da tutti i mateninja; la sua lama ha una forma particolare: è un quadrilatero fatto in modo che la sua diagonale minore lo divida in due triangoli isosceli, ciascuno con la diagonale come base. Chiamiamo *A*, *B*, *C*, *D* i vertici della lama di un kunai, con *A* e *C* estremi della diagonale minore; allora le misure tradizionali del fabbro del villaggio *della Retta* prevedono che $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle CDA = 90^\circ$ e che il segmento *AC* sia lungo 19 *mat-bu*. Il kunai di *Numeruto* si è spezzato in combattimento lungo la retta passante per *A* e perpendicolare ad *AD*. Quanto misura in *mat-bu*² la superficie del frammento di lama più grande?

4. Timidezza ninja

[★]

Anche all'accademia dei mateninja ogni tanto il clima si distende e stasera si sta svolgendo il gran ballo dei *Piccin*. Nella sala sono già arrivati tutti gli invitati: n mateninji (i maschietti) ed n mateninje (le femminucce) fanno sfoggio delle loro migliori divise e attrezzature, ma non hanno il coraggio di invitarsi a ballare, e si squadrano da lontano, divisi in 17 gruppi non vuoti. Due gruppi qualsiasi differiscono al più di un'unità e ogni femmina si trova in compagnia di sole femmine. Quanti sono gli n compresi tra 1 e 2007 tali che le condizioni sopracitate possano realizzarsi?

5. La prova di Otenusa

Il maestro *Isoshilo* è molto severo e sta tenendo da ore *Otenusa* sotto gli effetti di un'illusione tramite le sue arti magiche. Per sciogliere l'incantesimo *Otenusa* deve concentrarsi completamente e riuscire a determinare quanto vale la radice 99-esima del prodotto dei divisori positivi del numero $2^8 3^{10}$. Quanto fa?

6. Misure di sicurezza geometriche

Il villaggio del *Binomio* occupa un territorio desertico a forma di poligono convesso con 2007 lati. All'interno del territorio vi sono 1492 oasi puntiformi importantissime per la sopravvivenza dei mateninja. Avendo notato che, se si considera l'insieme di punti A , composto dai vertici del poligono e dalle oasi, non vi sono mai tre punti allineati, il capo-villaggio ha deciso di aumentare la sicurezza costruendo qualche muro. Vengono eretti muri lungo segmenti aventi vertici in due punti di A , in modo che il territorio sia diviso esclusivamente in triangoli e i muri si intersechino solo in punti di A . Qual è il numero massimo di zone chiuse triangolari che si possono ottenere?

7. Il sogno di Sekante

Il brillante *Sekante* ha un unico sogno: quando sarà *Grandin* si costruirà una magnifica reggia. Ha perfino già completato il progetto, deve solo decidere esattamente la forma del giardino: sa però che sarà triangolare, e che avrà un angolo di 30° , il lato opposto di 59 *mat-ken* e un altro lato di 95 *mat-ken*. Quanto vale il prodotto di tutti i possibili valori della lunghezza (in *mat-ken*) del terzo lato?

8. Un taglio inverosimile

Le formule matematiche dei mateninja vengono scritte su lunghe strisce rettangolari di pergamena di spessore nullo (sono magiche anch'esse!), che vengono arrotolate più volte attorno ad una matita ninja. Le matite ninja sono simili alle nostre: hanno la forma di un prisma la cui base è un esagono regolare di lato 3 *mat-shaku*. Il maldestro *Numeruto*, nel maneggiare la sua spada nuova, colpisce per sbaglio il prisma su cui è conservata la preziosa formula di Itô, tagliandolo perfettamente in due lungo un piano passante per il suo asse. Come conseguenza, la pergamena con la formula viene affettata in 93 foglietti quadrati. Quanti *mat-shaku*² misurava la superficie della pergamena?

9. La tecnica segreta di Numeruto

[★]

Numeruto è un esperto della tecnica superiore della moltiplicazione, un'arte magica che gli permette di ottenere istantaneamente il prodotto di un qualunque insieme di numeri interi. Il maestro *Isoshilo* gli ha però affidato un addestramento durissimo: considerati i numeri interi da 1 a 2007 deve calcolare il prodotto di ogni sottoinsieme con due o più elementi dei numeri assegnati e sommare tutti i prodotti ottenuti. Siete capaci di aiutarlo (pur senza poteri mateninja), calcolando almeno le ultime 4 cifre del risultato?

10. Misure di sicurezza geometriche

Il gran consiglio del villaggio codifica e affida le missioni ai mateninja esperti. Ad ogni missione viene assegnato anche un codice numerico che, per ragioni di sicurezza, è un intero positivo palindromo, multiplo di 3, e con un numero dispari di cifre. Quante missioni possono essere codificate usando codici validi di 7 cifre o meno e tutti diversi?

11. Il fabbro e la stella

Lo shuriken è una delle armi di base utilizzate da tutti i mateninja. Quelli del villaggio *della Retta* hanno un numero variabile di punte, ma sono prodotti tutti dallo stesso fabbro. Per fabbricare uno shuriken a $n > 1$ punte, il fabbro prende una piastra piana di metallo e inizia tracciandovi due circonferenze concentriche di raggio 14 mat-bu e 28 mat-bu . Sulla maggiore segna $2n$ punti equidistanti, numerati da 1 a $2n$ ordinatamente nel senso antiorario; da ciascuno conduce il raggio e segna un punto con lo stesso numero in corrispondenza dell'intersezione con la circonferenza minore. Traccia quindi i segmenti che congiungono ciascun punto pari interno con i due dispari a lui consecutivi esterni (il punto $2n$ è congiunto con $2n - 1$ e con 1); infine taglia lungo la spezzata ottenuta. Qual è il più piccolo numero intero, maggiore dell'area (in mat-bu^2) di qualunque shuriken?

12. Il compito in classe di arti magiche

[★]

Superato miracolosamente il compito di storia, *Numeruto* deve affrontare ora quello di arti magiche teoriche! La domanda più difficile chiede quale sia il massimo livello di forza vitale che un mateninja del segno della rana possa sviluppare. *Numeruto* è proprio del segno della rana ed è sicuro che la sua forza vitale dipende dalla sua concentrazione θ secondo la funzione:

$$105 \cos \theta - 208 \sin \theta + 103.$$

Qual è la massima forza vitale che *Numeruto* può sviluppare?

13. Una somma impagabile

La *korona*, la moneta ufficiale dei mateninja, ha esattamente gli stessi tagli dell'euro ed è divisa in *virgole* così come l'euro è diviso in centesimi. Naturalmente, i tagli di monete di *virgole* e *korone* sono esattamente gli stessi dei centesimi di euro e degli euro.

Quanto vale l'importo minimo, espresso in *virgole*, che non è possibile pagare esattamente con al massimo 7 monete o banconote, senza ricevere alcun resto?

14. La terza prova

Finalmente la prova pratica! *Numeruto* può dare il meglio di sé; tuttavia per riuscire perfettamente nella difficile tecnica della trasformazione, deve impastare la sua forza magica secondo delicatissimi equilibri. I livelli di forza magica utilizzabili sono tutti gli interi positivi a per i quali il polinomio $x^2 - ax + 4a$ ha solo radici intere positive. Se *Numeruto* eseguirà bene la tecnica, il suo voto all'esame sarà la somma di tutte le radici distinte che sono ottenibili in questo modo. Quanto potrà prendere al massimo?

15. Un ninja avido

Sekante ormai pensa solo alla sua futura reggia ed è talmente preso dall'idea di risparmiare denaro, che ha iniziato a fare i compiti degli altri allievi in cambio di soldi. Il maestro *Isoshilo* l'ha scoperto e per metterlo in riga, si è presentato sotto mentite spoglie offrendogli un lauto compenso per trovare tutte le terne di numeri interi positivi che soddisfano

$$a < b, \quad a < 4c, \quad bc^3 \leq ac^3 + b, \quad a, b, c \leq 1000.$$

Sekante si sta spremendo le meningi e *Isoshilo* non pensa che ce la possa fare, ma anche se ci riuscisse, lo schernirà senza pagarlo! Quante sono le soluzioni che dovrebbe trovare *Sekante*?

